Ejercicios autovalores y autovectores

1. Calcular los autovalores y los autoespacios de las siguientes matrices. Indicar las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada autovalor. Analizar si las matrices son diagonalizables.

$$\text{(a) } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Los autovalores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son las raíces de su polinomio característico

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

Notemos que P_A es un polinomio de grado n, por lo tanto tendrá a lo sumo n raíces distintas (reales o complejas).

Calculemos el polinomio característico de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_1}(\lambda) = det(\lambda I - A_1) = det\begin{pmatrix} \lambda & -6 & 0 \\ -2 & \lambda & -12 \\ 0 & -2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} \lambda & -12 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} + 6det\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$P_{A_1}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 24) + 6(-2\lambda) = \lambda^3 - 36\lambda = \lambda(\lambda^2 - 36)$

Como los autovalores de A_1 son las raíces de P_{A_1}, los autovalores de A_1 son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = -6$.

La multiplicidad algebraica de un autovalor es su multiplicidad como raíz del polinomio característico. Como en este caso todas las raíces son simples, los tres autovalores tienen multiplicidad algebraica 1.

Calculemos los autoespacios asociados a cada autovalor. Recordemos que $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ es un autovector de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ asociado al autovalor λ si $Av = \lambda v$. El autoespacio asociado a λ es

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n /\ Av = \lambda v\}$$

Para hallar los autovectores asociados a λ resolvemos el sistema $(\lambda I - A)v = 0$.

La multiplicidad geométrica del autovalor λ es la dimensión del autoespacio S_λ.

- Para $\lambda_1 = 0$ hay que resolver el sistema $-Av = 0$, o equivalentemente, $Av = 0$.
  Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_2 = 0$, $x_1 = -6x_3$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (-6x_3\ 0\ x_3)^t = x_3(-6\ 0\ 1)^t$, con $x_3 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ es

$$S_0 = gen\{(-6\ 0\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 0$ es 1.

- Para $\lambda_2 = 6$ hay que resolver el sistema $(6I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -2 & 6 & -12 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo obtenemos $x_2 = 3x_3$, $x_1 = x_2 = 3x_3$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (3x_3\ 3x_3\ x_3)^t = x_3(3\ 3\ 1)^t$, con $x_3 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 6$ es

$$S_6 = gen\{(3\ 3\ 1)^t\}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 6$ es 1.

- Para $\lambda_3 = -6$ hay que resolver el sistema $(-6I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & -12 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo obtenemos $x_2 = -3x_3$, $x_1 = -x_2 = 3x_3$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (3x_3\ -3x_3\ x_3)^t = x_3(3\ -3\ 1)^t$, con $x_3 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda_3 = -6$ es

$$S_{-6} = gen\{(3\ -3\ 1)^t\}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_3 = -6$ es 1.

Si tenemos autovectores de A asociados a autovalores distintos, estos autovectores son LI. En este caso, el conjunto $\{(-6\ 0\ 1), (3\ 3\ 1)^t, (3\ -3\ 1)^t\}$ es LI y por lo tanto una base de $\mathbb{R}^3$.

Entonces la matriz A es diagonalizable. Esto es, existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{3\times3}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. En este caso,

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Algunas observaciones con respecto a este ejemplo:

- Se verifica que $det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ y $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ (son propiedades válidas para todas las matrices).
- Si bien $v = 0_{\mathbb{R}^n}$ no puede ser autovector de A, $\lambda = 0$ sí puede ser autovalor de A. Esto sucede cuando la matriz A no es inversible.
- En el caso que $\lambda = 0$ sea autovalor de A, el autoespacio asociado es $S_0 = Nul(A)$.
- Cuando la multiplicidad algebraica de un autovalor es 1, su multiplicidad geométrica también es 1.
- Las matrices Q y D no son únicas.

b) Calculemos el polinomio característico de la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_2}(\lambda) = det(\lambda I - A_2) = det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$P_{A_2}(\lambda) = (\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda+1) - 3] = (\lambda-2)(\lambda^2-4)$

Como los autovalores de A_2 son las raíces de P_{A_2}, los autovalores de A_2 son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$.

La multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 2 (porque es una raíz doble del polinomio característico) y la multiplicidad algebraica de -2 es 1.

Calculemos los autoespacios:

- Para $\lambda = 2$ hay que resolver el sistema $(2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_1 = 3x_2$, $x_3 \in \mathbb{R}$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (3x_2\ x_2\ x_3)^t = x_2(3\ 1\ 0)^t + x_3(0\ 0\ 1)^t$, $v \neq 0$, y el autoespacio asociado a $\lambda = 2$ es

$$S_2 = gen\{(3\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 2.

- Para $\lambda_3 = -2$ hay que resolver el sistema $(-2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_2 = -x_1$, $x_3 = 0$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (x_1\ -x_1\ 0)^t = x_1(1\ -1\ 0)^t$, con $x_1 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda = -2$ es

$$S_{-2} = gen\{(1\ -1\ 0)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = -2$ es 1.

Observemos que en este caso las multiplicidades algebraicas y geométricas de ambos autovalores coinciden. Además $\{(3\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t, (1\ -1\ 0)^t\}$ es un conjunto LI (y por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^3$).

Entonces la matriz A es diagonalizable. Esto es, existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. En este caso,

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Calculemos el polinomio característico de la matriz $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_3}(\lambda) = det(\lambda I - A_3) = det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2) det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$P_{A_3}(\lambda) = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4)$

Como los autovalores de A_3 son las raíces de P_{A_3}, los autovalores de A_3 son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$.

La multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 2 (porque es una raíz doble del polinomio característico) y la multiplicidad algebraica de -2 es 1.

Calculemos los autoespacios:

- Para $\lambda = 2$ hay que resolver el sistema $(2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (0\ 0\ x_3)^t = x_3(0\ 0\ 1)^t$, $x_3 \neq 0$, y el autoespacio asociado a $\lambda = 2$ es

$$S_2 = gen\{(0\ 0\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 1.

- Para $\lambda_3 = -2$ hay que resolver el sistema $(-2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Resolviendo obtenemos $x_2 = -x_1$, $x_3 = 0$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (x_1\ -x_1\ 0)^t = x_1(1\ -1\ 0)^t$, con $x_1 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda = -2$ es
$$S_{-2} = gen\{(1\ -1\ 0)^t\}$$
La multiplicidad geométrica de $\lambda = -2$ es 1.

Observemos que en este caso la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$ es mayor estricta que la multiplicidad geométrica de este autovalor. Además $\{(0\ 0\ 1)^t, (1\ -1\ 0)^t\}$ es un conjunto LI pero no es una base de $\mathbb{R}^3$.

En este caso la matriz A no es diagonalizable.

2. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de $a_0 \in \mathbb{R}$ la matriz $A + a_0I$ es inversible? ¿Para que valores de a_0 y a_1 la matriz $A^2 + a_1A + a_0I$ es inversible?

La matriz A es la matriz A_2 del ejercicio anterior. Vimos que
$$A = QDQ^{-1}$$
con
$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Tenemos entonces que
$$A + a_0I = QDQ^{-1} + a_0I = QDQ^{-1} + Q(a_0I)Q^{-1} = Q(D + a_0I)Q^{-1}$$
Por lo tanto el determinante de $A + a_0I$ es
$$det(A + a_0I) = det(Q(D + a_0I)Q^{-1}) = det(Q)det(D + a_0I)det(Q^{-1}) = det(D + a_0I)$$
$$= det \begin{pmatrix} 2 + a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + a_0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 + a_0 \end{pmatrix} = (2 + a_0)^2(-2 + a_0)$$
Concluimos que
$$A + a_0I \ es\ inversible \quad \Leftrightarrow \quad det(A + a_0I) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 \neq -2\ y\ a_0 \neq 2$$
Análogamente,
$$A^2 + a_1A + a_0I = QD^2Q^{-1} + a_1QDQ^{-1} + Q(a_0I)Q^{-1} = Q(D^2 + a_1D + a_0I)Q^{-1}$$

$$det(A^2+a_1A+a_0I) = det(D^2+a_1D+a_0I) = det \begin{pmatrix} 2^2 + 2a_1 + a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 + 2a_1 + a_0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^2 - 2a_1 + a_0 \end{pmatrix}$$
$$det(A^2 + a_1A + a_0I) = (4 + 2a_1 + a_0)^2(4 - 2a_1 + a_0)$$
Concluimos que
$$A^2+a_1A+a_0I \ es\ inversible \quad \Leftrightarrow \quad det(A^2+a_1A+a_0I) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a_1+a_0 \neq -4\ y\ -2a_1+a_0 \neq -4$$

3. Hallar $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que $A^2 - 3A + 2I = B$, con $B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ y $det(A) = -2$.

Recordemos que si α es autovalor de A asociado al autovector v, entonces $p(\alpha)$ es autovalor de $p(A)$ asociado al mismo autovector.

Tomemos $p(x) = x^2 - 3x + 2$, así $p(A) = B$

Si α es autovalor de A entonces $p(\alpha)$ es autovalor de B

Buscamos autovalores y autovectores de $B:\ \lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 6$

$S_{\lambda=6} = gen\left\{(1\ 1)^T\right\}$ y $S_{\lambda=0} = gen\left\{(1\ 2)^T\right\}$

Proponemos buscar α tal que $p(\alpha) = 0$ o $p(\alpha) = 6$ como posible autovalor de A:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \ \rightarrow x = 1$ o $x = 2$ posibles autovalores de A asociados al autovector $(1\ 2)^T$

$x^2 - 3x + 2 = 6 \ \rightarrow x = -1$ o $x = 4$ posibles autovalores de A asociados al autovector $(1\ 1)^T$

Como debe ser $det(A) = -2$ tomamos $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = -1$

Así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. Determinar condiciones sobre a y b para que -2 sea autovalor de A y A no sea diagonalizable, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & b \end{pmatrix}$.

Para que -2 sea autovalor de A, -2 debe ser raíz del polinomio característico de A.

Como $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$, necesitamos que

$$p(-2) = det(-2I - A) = 0$$

$$det(-2I - A) = det \begin{pmatrix} -2 & 0 & -a \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -b-2 \end{pmatrix} = (-2)det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -b-2 \end{pmatrix} + (-a)det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)[-2(-b-2) - 4] - 4a = -4b - 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a$$

La matriz nos queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -a \end{pmatrix}$$

Veamos cuales son sus otros autovalores:

$$det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -a \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + a \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + a \end{pmatrix} + (-a)det \begin{pmatrix} -2 & \lambda \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda[\lambda(\lambda + a) - 4] - 4a = \lambda^3 + a\lambda^2 - 4\lambda - 4a = (\lambda^2 - 4)(\lambda + a)$$

Entonces los autovalores de A son 2, -2 y $-a$.

Si fueran todos distintos la matriz resultaría diagonalizable. Veamos que sucede si tenemos algún autovalor doble. Tenemos dos casos:

- Si $a = -2$, el autovalor $\lambda = 2$ tiene multiplicidad algebraica 2. Los autovectores asociados a $\lambda = 2$ son las soluciones del sistema

  $$(2I - A)v = 0,$$

  o sea los vectores no nulos que pertenecen a

  $$Nul(2I - A)$$

  Sabemos que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es la dimensión de $Nul(2I - A)$ y

  $$dim(Nul(2I - A)) = 3 - rg(2I - A)$$

  En este caso

  $$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  tiene rango 2 así que $dim(Nul(2I - A)) = 1$ y la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ no coincide con su multiplicidad algebraica. Luego la matriz A no es diagonalizable.

- Si $a = 2$, el autovalor $\lambda = -2$ tiene multiplicidad algebraica 2.
  En este caso

  $$-2I - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  tiene rango 2 así que $dim(Nul(-2I - A)) = 1$ y la multiplicidad geométrica de $\lambda = -2$ no coincide con su multiplicidad algebraica. Luego la matriz A no es diagonalizable.

Llegamos a que -2 es autovalor de A y A no es diagonalizable si

- $a = -2$ y $b = 2$
- $a = 2$ y $b = -2$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

   a) Hallar el espectro de A y comprobar que es diagonalizable.

   b) Comprobar que

   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} > 0$$

   y concluir que no existe el límite $\lim_{n \to +\infty} A^n$.

   c) Hallar una base del subespacio $S = \{v \in \mathbb{R}^3 / \lim_{n \to +\infty} A^n v = 0\}$.

   d) Hallar una base del subespacio $T = \{v \in \mathbb{R}^3 / \textit{existe} \lim_{n \to +\infty} A^n v\}$.

   e) Determinar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim_{n \to +\infty} A^n v = (3\ 0\ 3)^T$.

   a) Los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Como $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y tiene 3 autovalores distintos, A es diagonalizable.
   El espectro de A es

   $$\sigma(A) = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$$

Los autoespacios son:

$$S_{\lambda=1} = gen\{(1\ 0\ 1)^T\}, \quad S_{\lambda=2} = gen\{(0\ 1\ 0)^T\}, \quad S_{\lambda=\frac{1}{2}} = gen\{(2\ 0\ 1)^T\}$$

La matriz A puede factorizarse en la forma

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Por el teorema espectral podemos escribir a la matriz A en la forma

$$A = G_1 + 2G_2 + \frac{1}{2}G_3$$

donde las G_i son las proyecciones sobre $Nul(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $Col(A - \lambda_i I)$. Si $P = (x_1\ x_2\ x_3)$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ y_3^T \end{pmatrix}$, tenemos que

$$G_i = \frac{x_i y_i^T}{y_i^T x_i}$$

En este caso,

- $$G_1 = \frac{x_1 y_1^T}{y_1^T x_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1\ 0\ 2)}{(-1\ 0\ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $$G_2 = \frac{x_2 y_2^T}{y_2^T x_2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0)}{(0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$G_3 = \frac{x_3 y_3^T}{y_3^T x_3} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0\ -1)}{(1\ 0\ -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir de esta descomposición nos queda que

$$A^n = G_1 + 2^n G_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n G_3$$

Tomando norma obtenemos

$$\|A^n\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \right\|^2 > (2^n)^2$$

Luego

$$\frac{\|A^n\|}{2^n} > 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|A^n\|}{2^n} \geq 1$$

y por lo tanto no existe $\lim_{n\to+\infty} A^n$.

c) Con la notación del ejercicio anterior ($x_1 = (1\ 0\ 1)^T$, $x_2 = (0\ 1\ 0)^T$, $x_3 = (2\ 0\ 1)^T$), tenemos que todo vector $v \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$v = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

Entonces

$$A^n v = (G_1 + 2^n G_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n G_3)v = G_1 v + 2^n G_2 v + (\frac{1}{2})^n G_3 v = ax_1 + 2^n bx_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n cx_3$$

Para que $\lim_{n\to+\infty} A^n v = 0$, necesitamos $a = 0$ y $b = 0$, entonces una base de S es

$$B_S = \{(2\ 0\ 1)^T\}$$

d) A partir del item anterior tenemos que existe el límite $\lim_{n\to+\infty} A^n v$ si $b = 0$. Entonces una base de T es

$$B_T = \{(1\ 0\ 1)^T, (2\ 0\ 1)^T\}$$

e) Si $b = 0$, nos queda que

$$\lim_{n\to+\infty} A^n v = \lim_{n\to+\infty} ax_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n cx_3 = ax_1$$

Si queremos que el límite sea igual a $(3\ 0\ 3)^T = 3x_1$, nos queda que $a = 3$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces los vectores son de la forma

$$v = 3x_1 + cx_3, \quad c \in \mathbb{R}$$

.